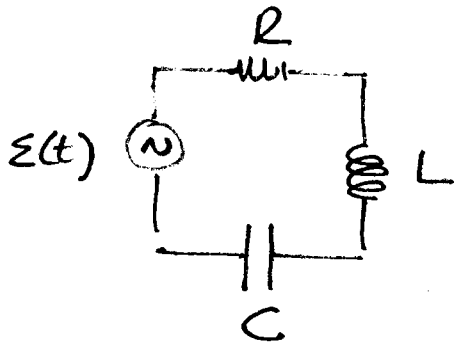


Circuito RLC ; ressonância



Fonte de tensão alternada :

$$E(t) = E_0 \cos \Omega t$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + RI + \frac{q}{C} = E_0 \cos \Omega t$$

Derivando a eq. acima em relação ao tempo obtém:

$$L \frac{d^3 I}{dt^3} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -E_0 \Omega \sin \Omega t \quad (1)$$

Esta é uma eq. diferencial de 3ª ordem não homogênea.

A solução geral é dada por $I(t) = I_h(t) + I_p(t)$.

$I_h(t)$ é solução da eq. homogênea: $L \frac{d^3 I_h}{dt^3} + R \frac{dI_h}{dt} + \frac{I_h}{C} = 0$

e $I_p(t)$ é uma solução particular da eq. (1).

Sabemos que $I_h(t)$ decai exponencialmente com o tempo. A escala de tempo característica é dada por $\tau = 1/\omega_1 = 2L/R$. Após um intervalo de tempo $t \gg \tau$ a solução homogênea $I_h(t) \rightarrow 0$ e sobra apenas a solução particular $I_p(t)$.

Estamos interessados apenas nesse regime $t \gg \tau$, ou seja, depois do regime transitório.

Note que quanto menor τ (maior R) mais rápido é esse transitório.

A solução particular deve ser oscilatória e com frequência $\frac{\Omega}{2\pi}$, tendo em vista que a bateria força o sistema oscilar com essa frequência.

A sol. particular deve satisfazer.

$$L \frac{d^2 \underline{I}_p}{dt^2} + R \frac{d \underline{I}_p}{dt} + \frac{\underline{I}_p}{C} = -E_0 \Omega \sin \Omega t = \frac{d \tilde{E}}{dt}$$

Podemos considerar $\tilde{E}(t) = E_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow E(t) = \text{Re } \tilde{E}(t)$

Considere a equação para a carga complexa $\tilde{q}(t)$

$$L \frac{d^2 \tilde{q}}{dt^2} + R \frac{d \tilde{q}}{dt} + \frac{\tilde{q}}{C} = \tilde{E}(t)$$

Note que $q(t) = \text{Re } \tilde{q}(t)$ pois tomando a parte real dos dois lados dessa equação vem que

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \text{Re } \tilde{E}(t) = E_0 \cos \Omega t.$$

Analogamente

$$L \frac{d^2 \tilde{I}_p}{dt^2} + R \frac{d \tilde{I}_p}{dt} + \frac{\tilde{I}_p}{C} = \frac{d \tilde{E}(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} I_p(t) &= \text{Re } \tilde{I}_p(t) \quad \text{pois} \quad \text{Re } \frac{d \tilde{E}(t)}{dt} = \text{Re } i\Omega E_0 e^{i\Omega t} \\ &= -E_0 \Omega \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Vamos obter uma solução do tipo

$$\tilde{I}_p(t) = I_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow$$

$$L(-\omega^2) I_0 e^{i\omega t} + R i\omega I_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0 e^{i\omega t}}{C} = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \left\{ -\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right\} I_0 e^{i\omega t} = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{ R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right\}}_{Z} I_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \tilde{\varepsilon}(t)$$

Z = impedância do circuito.

$$Z = R + i \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_X = R + iX \quad \begin{array}{l} \text{reatância} \\ \text{resistância} \end{array}$$

$$X_C = \text{reatância capacitiva} = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X = X_L + X_C$$

$$X_L = \text{reatância indutiva} = \omega L$$

$$Z I_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 = Z I_0} \quad \text{Tipo VARI}$$

A impedância emo um "resistência" complexa.

$$Z = R + iX = |Z| e^{i\theta}$$

$$|Z| = (R^2 + X^2)^{1/2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{X}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right)$$

$$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} = \frac{\varepsilon_0}{Z} e^{i\omega t} = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)}$$

$$\boxed{I_p(t) = \text{Re } \tilde{I}(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)}$$

Podemos escrever $\boxed{I_p(t) = A \cos(\Omega t + \theta)}$. Note que tanto a amplitude da corrente assintótica quanto a diferença de fase dependem de R .

$$A = A(R) = \frac{E_0}{|Z|} \quad \theta = \theta(R) = \tan^{-1} \left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} \right)$$

$$\boxed{A(R) = \frac{E_0}{\left[R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2 \right]^{1/2}}}$$

$A(R)$ tem um máximo: $\frac{dA}{dR} = 0$

$$A(R) = \frac{E_0}{\left[R^2 + (X_L + X_C)^2 \right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{dA}{dR} = \frac{-(\frac{1}{2}) \left[R^2 + (X_L + X_C)^2 \right]^{-1/2} \cdot 2(X_L + X_C) \left(\frac{dX_L}{dR} + \frac{dX_C}{dR} \right)}{\left[R^2 + (X_L + X_C)^2 \right]^{3/2}} = 0$$

$$\frac{dX_L}{dR} = L \quad ; \quad \frac{dX_C}{dR} = \frac{1}{R^2 C} \quad \Rightarrow \quad X_L = X_C \quad \text{ou} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{ou} \quad \left[\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right]$$

Na ressonância $\theta = 0$ $A(\omega_0) = E/R$

$$I(t) = \frac{E}{R} \cos(\omega_0 t)$$

Note que $A(R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ e tem valor máximo para $R = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Quanto menor for o valor de R , mais alto e o pico na ressonância.

34

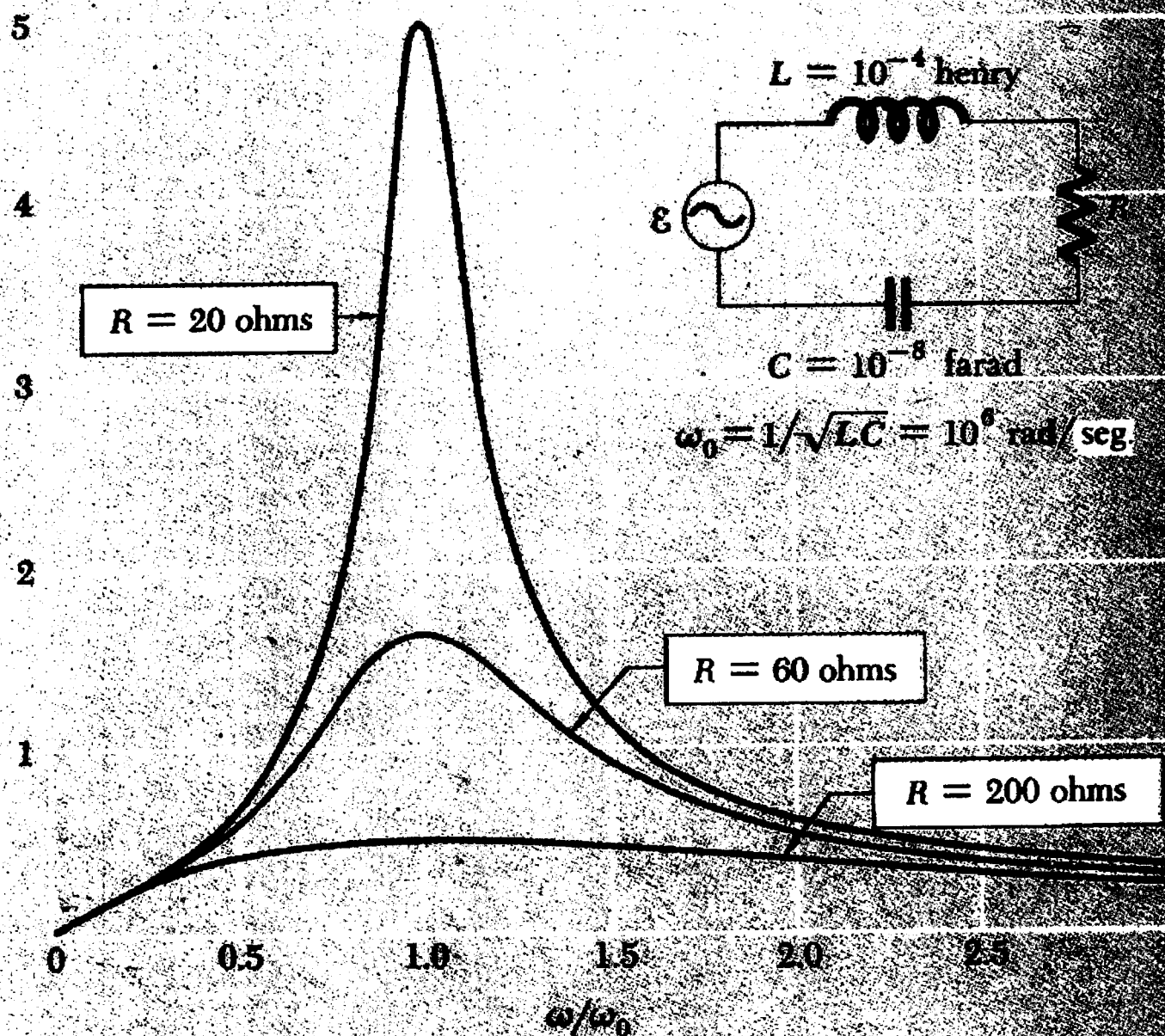
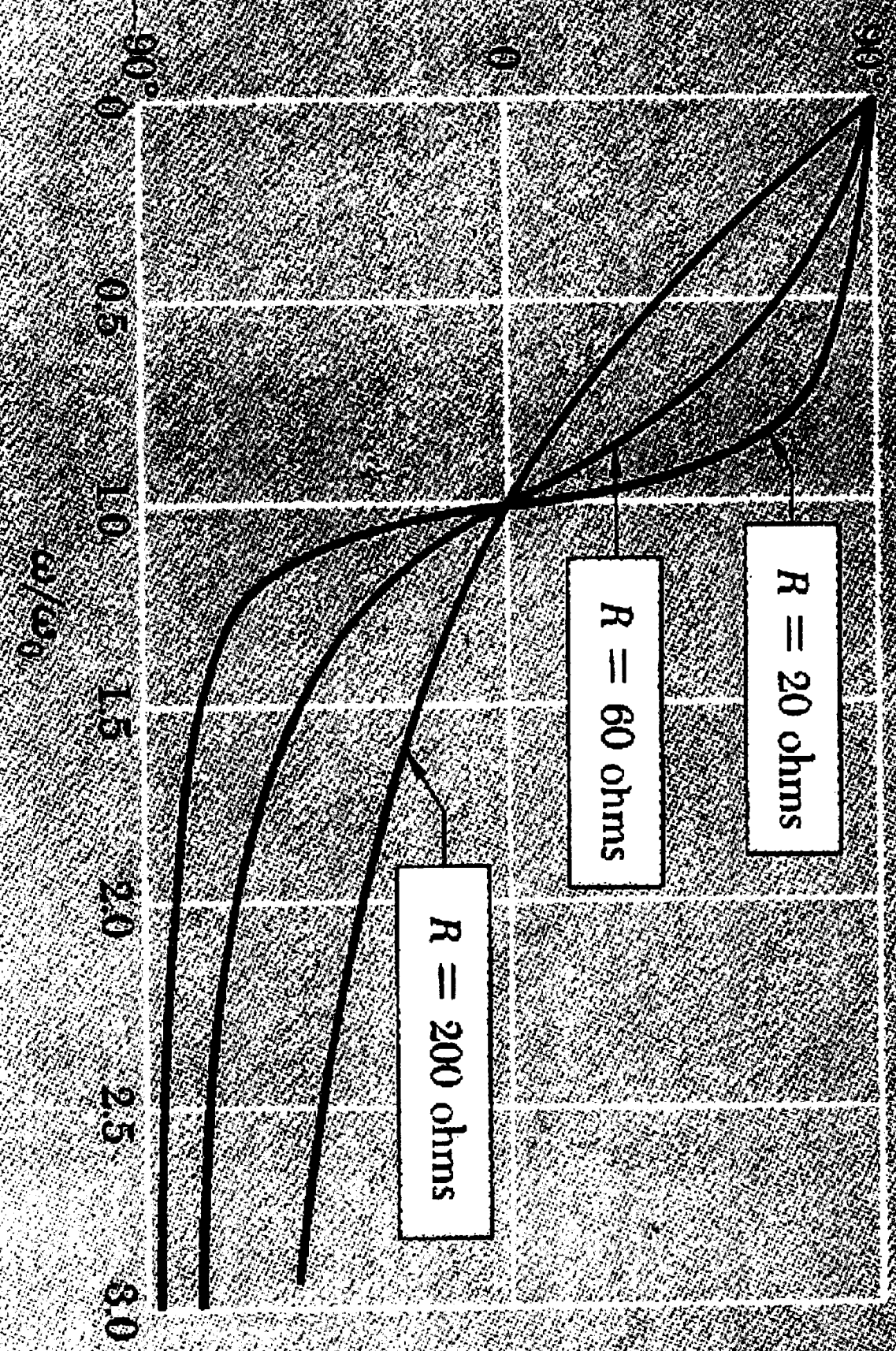


Fig. 8.10 Uma fem de amplitude 100 V é aplicada em um circuito RLC-série. Os elementos do circuito são os mesmos que no exemplo do circuito amortecido da Fig. 8.3. A amplitude da corrente é calculada pela Eq. 41 e colocada no gráfico, em função de ω/ω_0 , para três diferentes valores de resistência.

Angulo de fase ϕ em graus



Nos circuitos de corrente alternada, em geral, estamos interessados apenas na solução assintótica, mas no regime transiente. Nesse caso, as grandezas oscilam com a frequência da fonte de tensão.

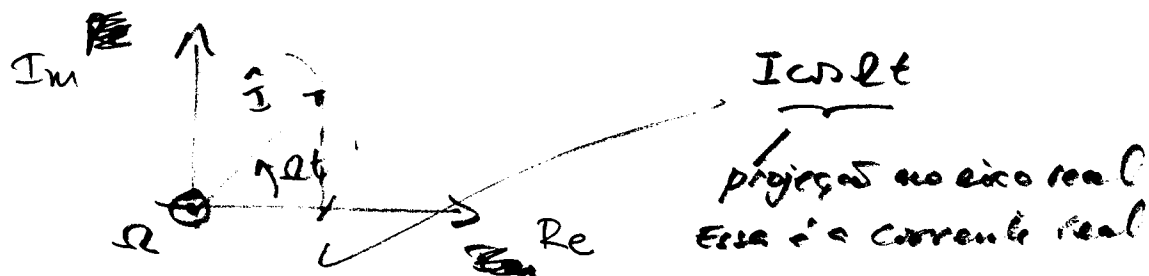
A notação complexa permite uma análise relativamente simples. Vamos supor que a dependência temporal da corrente i é do tipo $e^{i\omega t}$. Definimos uma corrente complexa representada por um fasor no plano complexo

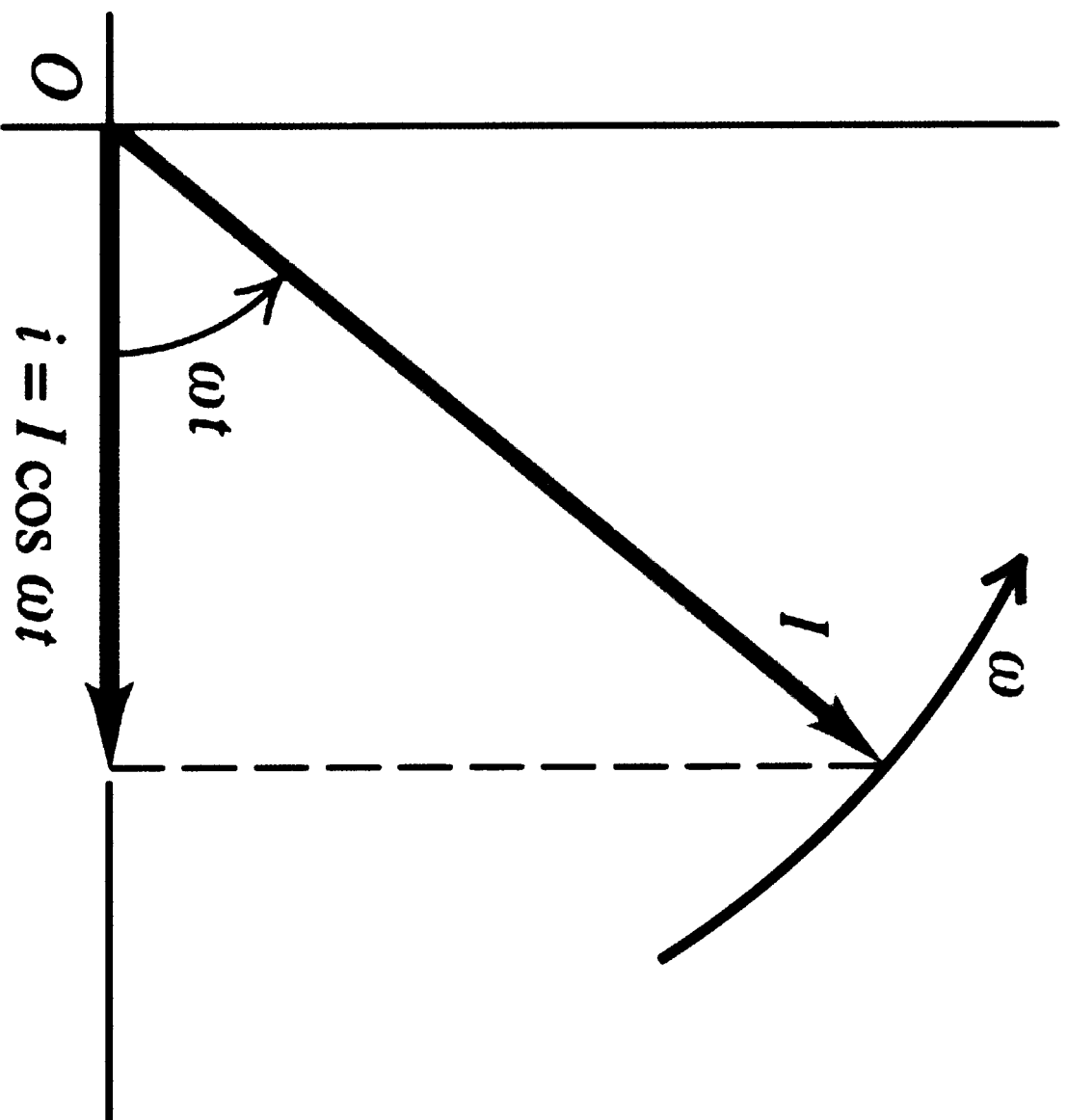
$$\hat{I} = \bar{I} e^{i\omega t} \quad \bar{I} \text{ é uma amplitude t.b. complexa}$$

A voltagem, analogamente, t.b. é representada por um * complexo

$$\hat{V}(t) = \bar{V} e^{i\omega t} \quad \text{onde } \bar{V} = V_0 e^{i\varphi} \Rightarrow$$

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i(\omega t + \varphi)} ; \varphi = \text{fase de } \bar{V}$$





Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Phasor diagram -- projection of rotating vector (phasor) onto the *horizontal* axis represents the instantaneous current.

Alguns exemplos:

(1) Circuito puramente resistivo

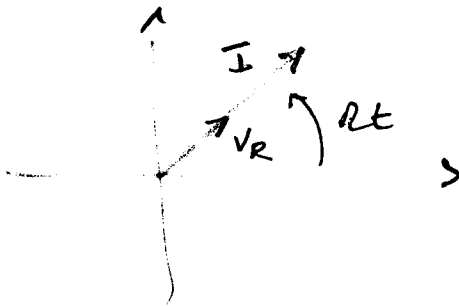
Em qq instante de tempo

$$\mathcal{E} - Ri = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = Ri$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \bar{V} e^{i\omega t} \quad \hat{I} = \bar{I} e^{i\omega t} \Rightarrow \hat{\mathcal{E}} = R \bar{I} e^{i\omega t}$$

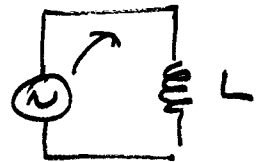
$$\bar{V} = R \bar{I} \Rightarrow Z_R = R$$

e a d.d.p. está em fase com a corrente.



(2) Circuito puramente indutivo

$$\mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = 0$$

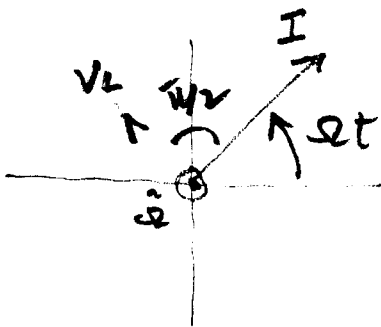


$$\hat{\mathcal{E}} = \bar{V} e^{i\omega t} ; \quad \hat{I} = \bar{I} e^{i\omega t}$$

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{\mathcal{E}} = L i\omega \bar{I} e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{\mathcal{E}} = \underbrace{i\omega L}_{Z_L} \bar{I}$$

$Z_L = i\omega L$ é impedância indutiva

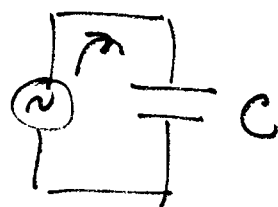
$$\bar{\mathcal{E}} = \omega L e^{i\pi/2} \Rightarrow \bar{V}_L \text{ está adiantado de } \frac{\pi}{2} \text{ em relação a } \bar{I}$$



V_L está defasado de $\frac{\pi}{2}$ de $\hat{I}$
(adiantado de $\frac{\pi}{2}$)

(39)

(3) Circuito puramente capacitivo



$$\varepsilon - \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = CV \Rightarrow I = C \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow$$

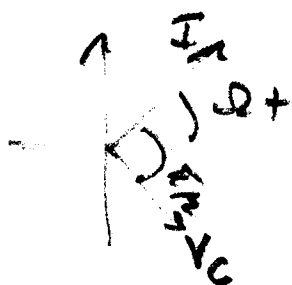
$$\hat{I} = C \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}$$

$$\hat{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} e^{i\omega t}; \quad \hat{I} = \bar{I} e^{i\omega t}$$

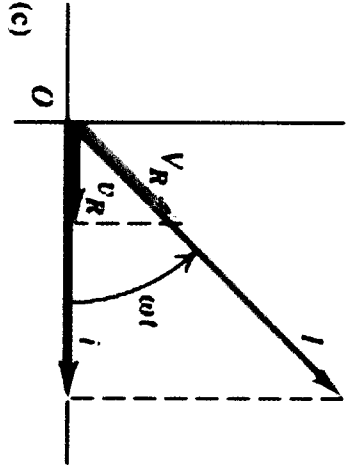
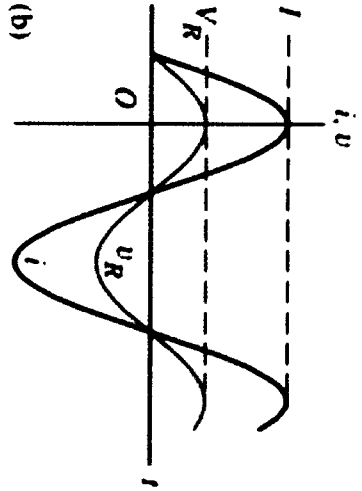
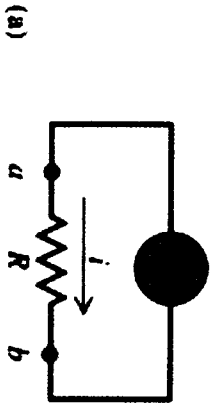
$$\frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \bar{\varepsilon} i\omega e^{i\omega t} \Rightarrow \bar{I} e^{i\omega t} = i\omega C \bar{\varepsilon} e^{i\omega t}$$

$$\bar{\varepsilon} = Z_C \bar{I} \quad \text{onde } Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

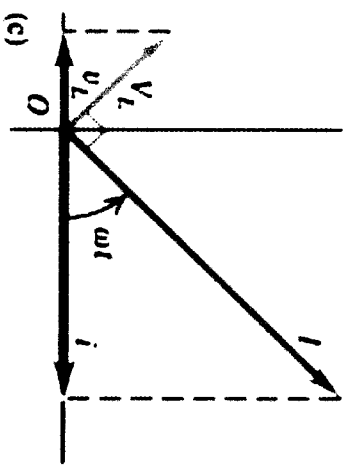
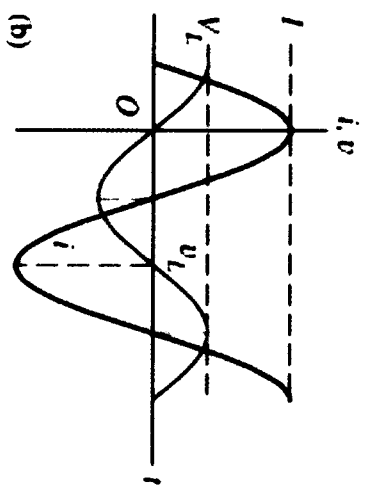
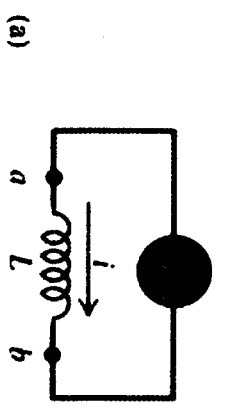
$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega C} \bar{I}$$



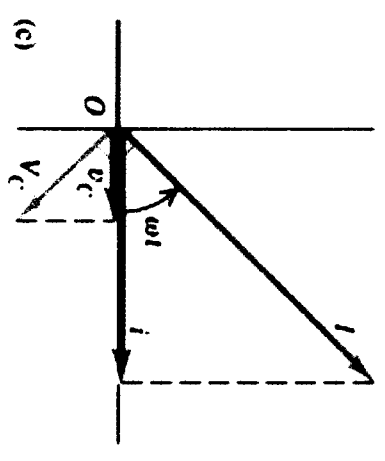
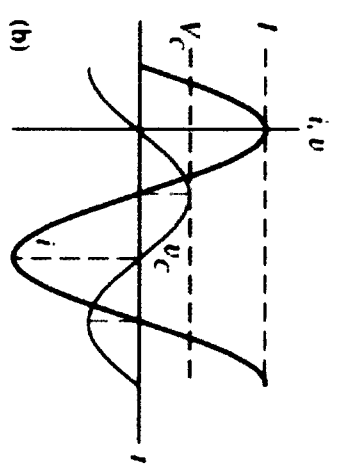
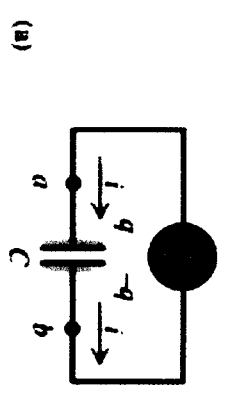
$\hat{V}_C$ está defasado de $\frac{\pi}{2}$ de $\hat{I}$
(atrasado de $\frac{\pi}{2}$ em relação a $\hat{I}$)



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

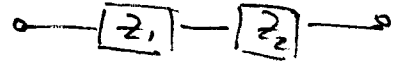
Graphs (and phasors) of instantaneous voltage and current showing phase relation between current (red) and voltage (blue).

Remember: "ELI the ICE man"

Conexão de impedância em série e em paralelo: (41)

Conexão em série: corrente que flui através dos elementos do circuito é a mesma

$$V = V_1 + V_2 = Z_1 I + Z_2 I = (Z_1 + Z_2) I$$



$$\boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2}$$

$$V = Z_{eq} I \Rightarrow$$

Note que as impedâncias se somam como $\#$'s complexos

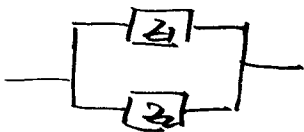
$$Z_1 = R_1 + iX_1 ; Z_2 = R_2 + iX_2 \Rightarrow Z_{eq} = (R_1 + R_2) + i(X_1 + X_2)$$

$$\Rightarrow |Z_{eq}| = [(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^{1/2}$$

$$Z_{eq} = |Z_{eq}| e^{i\theta} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Obs: Não é a soma das magnitudes de Z_1 e Z_2 !

Conexão em paralelo: Nesse caso a



A mesma voltagem aparecerá nos indutâncias e a corrente total é a soma das correntes através de cada uma delas.

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{Z_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

Mais uma vez cuidado: são $\#$'s complexos.

A soma deve ser feita como tal.

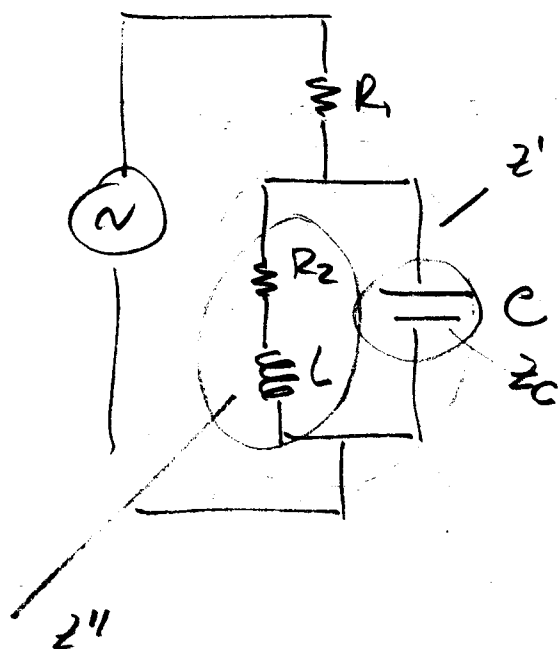
Example:

42

$$Z = R_1 + Z'$$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z''}$$

$$Z'' = R_2 + Z_L$$



$$\Rightarrow Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}} \Rightarrow$$

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R_2 + Z_L}}$$

$$Z_C = i\omega L ; Z_L = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z = R_1 + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R_2 + i\omega L}} = R_1 + \frac{R_2 + i\omega L}{i\omega C(R_2 + i\omega L) + 1}$$

———//———